

## **Лекция: «Цели и задачи изучения математики на технических направлениях вузов»**

**Дата проведения занятия: 13.10.2020**

Математика – базовая междисциплинарная дисциплина, объединяющая своими методами, алгоритмами, моделями остальные науки. Кроме того, благодаря новым информационным технологиям усиливается роль математического моделирования и алгоритмического мышления.

**Цель курса:** формирование начального уровня математической культуры специалиста, достаточного для использования математики в профессиональной сфере будущего специалиста и для самообразования в области математики и математических методов.

Исторически составные части математики - арифметика и геометрия - выросли, как известно, из нужд практики, из необходимости индуктивного решения различных практических задач земледелия, мореплавания, астрономии, сбора налогов, возврата долгов, наблюдения за небом, распределения урожая и т.п. При создании теоретических основ математики, основ математики как научного языка, формального языка наук, различных теоретических построений стали важными элементами различные обобщения и абстракции, исходящие из этих практических задач, и их инструментарий.

Истоки математики как науки и языка знаний восходят к древнейшим цивилизациям. Появление математики как систематической науки оказало, в свою очередь, громадное развивающее влияние на другие области знания. Математика стала не просто лишь полезным практическим аппаратом, но и основным инструментом выявления внутренней сущности явлений и процессов, построения различных теоретических выводов, формальных оснований наук.

Язык математики - это искусственный, *формальный язык*, со всеми его недостатками (например, малой образностью) и достоинствами (например, сжатостью описания).

Математическое описание фактов, законов природы, общества и познания позволяет нам по-новому взглянуть на их взаимосвязи, обнаружить новые связи. Зачастую эти связи невозможно обнаружить без математики, на опыте, в реальном мире.

Современная теоретическая математика - это наука о математических структурах, математических инвариантах различных систем и процессов. Современная прикладная математика - это наука, занимающаяся поиском, математическим описанием и исследованием различной природы инвариантов и их приложений.

Таким образом, это две ветви одной и той же науки, и одна из них не может развиваться без другой. Отнесение одной и той же задачи к чистой или к прикладной математике зависит, в основном, от цели и доступных ресурсов ее исследования.

Предмет науки обычно понимают как совокупность, систему тех закономерностей, которые изучаются ею. Строго говоря, математика непосредственно не изучает реально законы развития природы или общества, как, например, физика, химия, биология, история и др. Она помогает в их изучении другим наукам, связывает эти науки, законы, усиливает их. Математика позволяет получать абстрактное знание о законах и процессах, а эти знания затем используют все другие науки. Служение наукам не является единственной функцией математики, ее главной целью. У нее есть свои, важнейшие внутренние цели эволюции.

Специфика математического метода изучения действительности определяет и особенность критерия истины в математике. В математике критерий истины выступает в своеобразной форме: мы не можем доказать истинность математического предложения, основываясь лишь только на практике, как во многих других науках.

Практика является исходным пунктом математических понятий, но в качестве непосредственного критерия истины утверждений теоретической математики она обычно не выступает. Только в прикладной математике практика может определять адекватность и эффективность математического аппарата для описания конкретных систем и процессов. При этом практика как критерий адекватности теории не всегда применима.

Деление математики на теоретическую и прикладную хотя и традиционно, тем не менее, как отмечено выше, - часто лишь условное. Математика, наряду с созданием новых теоретических методов решения практических задач, изучает и оттачивает применяемый ею самой инструментарий, развивает математические теории и методы, ищет более широкие и естественные сферы ее применимости, эволюционирует сама для нужд эволюции других наук, которые, в свою очередь, эволюционируют, используя математику.

Те достижения математики, которые еще не нашли приложения, развивают внутреннюю сущность и структуру математики и могут обрести в дальнейшем самые неожиданные применения, вплоть до революционных для развития науки и техники.

Мировоззренческая роль математики состоит, в частности, в том, что она помогает вникать в суть явлений, происходящих в окружающем нас мире, особенно тех, что не лежат на поверхности, выявлять, описывать и исследовать как внешние, так и внутренние связи системы. Например, дифференциальные уравнения эволюционных систем различной природы и различного происхождения - часто одни и те же, что демонстрирует общность законов природы, общества, познания.

Процитируем Ф.Бэкона: «Не зная математики, нельзя знать ни прочих наук, ни мирских дел. И что еще хуже, люди, в ней не сведущие, не ощущают собственного невежества, а потому не ищут от него лекарства. И напротив того, знакомство с этой наукой подготавливает душу и возвышает ее ко всякому прочному знанию, так что, если кто познал источники мудрости, касающиеся математики, и правильно применил их к познанию прочих наук и дел, тот сможет без ошибок и без сомнений, легко и по мере сил постичь и все последующие науки».

Воспитательная роль математики состоит, в частности, в том, что ее изучение и применение вырабатывает исследовательский, творческий подход к делу; настойчивость, терпение и трудолюбие; аккуратность; логичность и строгость суждений; умение выделять главное и игнорировать второстепенное, не влияющее на суть проблемы; умение ставить новые задачи и др. Воспитательная функция математики подчинена функциям общечеловеческого воспитания.

Как утверждал А.Д.Александров: «Нигде, как в математике, ясность и точность вывода не позволяет человеку отвертеться от ответа разговорами вокруг вопроса. Математика учит точности мысли, подчинению логике доказательства, понятию строго обоснованной истины, а все это формирует личность, пожалуй, больше, чем музыка. Математика полезна тем, что она трудна».

Культурная роль математики состоит, в частности, в том, что повышение общематематической культуры естественным образом, в соответствии с функциями математики, содействует повышению и профессиональной и общей культуры (мышления, поведения, выбора).

Математика - это своего рода особая культура и искусство формализации знаний.

Эстетическая роль математики (эстетика - наука о прекрасном) состоит, в частности, в том, что она сводит разрозненные элементы и связи системы в целостную композицию, обладающую эстетическими качествами (красота, обаяние, цвет, форма, пропорция, симметрия, гармония, единство частей целого, удовольствие и др.).

Математизация сфер общества - характерная черта нашей эпохи. Математизации подвержены не только естественнонаучные области, но и социально-гуманитарные: история, филология, социология и др. Благодаря математизации развивается язык наук, следовательно, и сами науки. Математика также обогащается новыми идеями и приложениями вследствие этого.

Математика широко используется как в традиционных, естественнонаучных областях (физика, биология, экономика и др.), так и в гуманитарных - истории, лингвистике, психологии, социологии и др. Она образует специальные ветви (математическая физика, математическая биология, математическая экономика и др.) или методы (математические методы лингвистики, социологии и др.).

Математизация - существенный фактор прокладывания и укрепления междисциплинарных связей, решения междисциплинарных проблем, проникновения не только в количественно отражаемую сущность явлений, но и в их качественную сущность.

История математики складывается не из простой суммы математических знаний, а из цепочки преемственности достижений, нередко - преемственности ошибок, которые не смогли нарушить развитие и целостность математической мысли.

Эта история связана с историей других наук, техники, культуры, искусства многих стран и народов, больших и малых, историей жизни и деятельности выдающихся и рядовых математиков.

Для успешного изучения курса необходимо использование учебной литературы:

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике, 1,2 часть – М.: Рольф, 2000.
2. П.Е.Данко, А.П.Попов, Т.Я.Кожевникова, Высшая математика в упражнениях и задачах, М: ВШ, 1997, 1, 2 часть.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980.

Дополнительные материалы выложены на личном сайте преподавателя: [jessycat.ru](http://jessycat.ru) в разделе образование. На сайте несложно найти электронный адрес преподавателя на который следует высылать на проверку сканы работ и ссылку на страницу в соц.сетях.

В течение семестра студентам следует выполнить контрольную работу и выслать её на проверку. Скан работы можно выслать на проверку по адресу [shnalti@gmail.com](mailto:shnalti@gmail.com) одним файлом. Бумажный вариант проверенной и зачѐнной контрольной работы является допуском к экзамену (зачѐту) по математике и хранится на кафедре математики.

### **Правила выполнения и оформления контрольной работы**

Каждое задание контрольной работы содержит 10 вариантов. Студент должен выполнить задания, номер которого совпадает с последней цифрой номера зачѐтной книжки.

Контрольную работу следует выполнять в тетради чернилами синего или чѐрного цвета. Титульный лист работы помещают на обложке тетради.

Решения задач контрольной работы желательно следует располагать в порядке возрастания номеров, сохраняя номера задач. Перед решением задачи с одинаковой формулировкой следует полностью выписать её условие, подставляя вместо  $n$  номер своего варианта.

#### **Задание 1**

Выполнить действия с матрицами:  $(3A - 2B \cdot (A - B))^T$ , где

$$A = \begin{pmatrix} n+2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2n \\ 0 & n-1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ n & n+1 & 0 \\ 2 & 1 & n-2 \end{pmatrix}$$

## Задание 2

Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} nx + 3y - (n - 1)z = 4 \\ -x + 2ny + (3 - 2n)z = 2 \\ -nx + (n + 1)y + 2z = 3 \end{cases}$$

тремя способами:

- методом Гаусса;
- по формулам Крамера;
- с использованием обратной матрицы.

## Задание 3

Точки  $A, B$  и  $C$  с координатами  $A(0; n), B(-n + 2; 1), C(14 - n; -2)$  - это вершины треугольника.

- составить уравнение прямой, параллельной стороне  $AB$  и проходящей через вершину  $C$ ;
- составить уравнение высоты  $CK$  и найти её длину;
- найти величину угла между сторонами  $AC$  и  $CB$ ;
- сделать чертёж.

## Задание 4

Кривая II порядка задана каноническим уравнением.

№	для нечётных $n$	для чётных $n$
1	$(x - n)^2 + \left(y + \frac{3}{2}n\right)^2 = 4$	$(x + n)^2 + \left(y - \frac{3}{2}n\right)^2 = 9$
2	$\frac{x^2}{(n + 1)^2} + \frac{y^2}{(13 - n)^2} = 1$	
3	$\frac{x^2}{(11 - n)^2} - \frac{y^2}{(n + 2)^2} = 1$	$\frac{x^2}{(11 - n)^2} - \frac{y^2}{(n + 2)^2} = -1$
4	$(x - n + 2)^2 = 2y$	$(y - 1 + n)^2 = x$

- найти длины полуосей  $a$  и  $b$ , фокусное расстояние  $c$ , эксцентриситет кривой  $\varepsilon$  (если это возможно);

- сделать чертёж: построить линии, заданные уравнениями, отметить фокусы, построить директрисы и асимптоты (если есть).

### Задание 5

для нечётных $n$	для чётных $n$
Найти вектор $\vec{a}$ , если известно, что $\vec{a} \parallel \overline{AB}$ , дана длина (модуль) вектора $ \vec{a} $ и дополнительное условие: $\text{пр}_{Ox} \vec{a} < 0$ $ \vec{a}  = n + 2, A(0,1, -n), B(n + 2, 2, 0)$	Известно, что вектор $\vec{a}$ ортогонален векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$ ( $\vec{a} \perp \vec{b}, \vec{a} \perp \vec{c}$ ), дана длина (модуль) вектора $ \vec{a} $ . Найти вектор $\vec{a}$ . при дополнительном условии: $\text{пр}_{Ox} \vec{a} < 0$ $\vec{b} = (0, n, -2), \vec{c} = (12 - n, 3, 1),  \vec{a}  = n$

### Задание 6

Вычислить пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталья и принципом эквивалентности бесконечно малых:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + (5 - n)x - 5n}{x^2 - (n + 2)x + 2n}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + (5 - n)x - 5n}{x^2 - (n + 2)x + 2n}$$

$$\lim_{x \rightarrow n} \frac{x^2 + (5 - n)x - 5n}{x^2 - (n + 2)x + 2n}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + nx} - 3}{(n + 2)x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3nx)}{\arctg((n + 2)x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2x}{2x - n} \right)^{nx}$$

### Задание 7

Исследовать функцию на непрерывность в точках  $x_1$  и  $x_2$ :

$$f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x-n}}, & x < -1 \\ nx, & x \geq -1 \end{cases}, \quad x_1 = n, \quad x_2 = 13 - n$$

Сделать чертёж.

### Задание 8

Вычислить производные первого порядка от данных сложных функций:

№	Функция	№	Функция
1	<p>а) <math>y = x \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)</math></p> <p>б) <math>y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})</math></p> <p>в) <math>y = \operatorname{tg}(\arccos \sqrt{1 - 2x^2})</math></p> <p>г) <math>y = x^{\sqrt{x}}</math></p> <p>д) <math>x \cdot \sin y - y \cdot \cos x = 0</math></p>	6	<p>а) <math>y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}</math></p> <p>б) <math>y = \cos x \ln \operatorname{tg} x</math></p> <p>в) <math>y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2}</math></p> <p>г) <math>y = x^{5x}</math></p> <p>д) <math>(e^x - 1)(e^{2y} - 1) = 1</math></p>
2	<p>а) <math>y = \frac{1}{81}(x^2 + 18) \ln^2 x</math></p> <p>б) <math>y = \ln^3(1 + \cos x)</math></p> <p>в) <math>y = \arcsin \frac{e^{2x}}{x^3 + x} - 5</math></p> <p>г) <math>y = (1 + x)^{2x}</math></p> <p>д) <math>y^2 + x^2 = \ln \frac{y}{x} + 5</math></p>	7	<p>а) <math>y = x \sin 4x + \cos 7x^2</math></p> <p>б) <math>y = \ln(\cos \sqrt{x})</math></p> <p>в) <math>y = \sqrt[3]{3x + \sin 2x}</math></p> <p>г) <math>y = \left(\frac{1}{x}\right)^{2x}</math></p> <p>д) <math>e^{x \cdot y} = \cos(x^2 + y^2)</math></p>
3	<p>а) <math>y = x \arcsin \frac{2}{3x+4}</math></p> <p>б) <math>y = \ln(e^{4x} + \sqrt{e^{8x} - 1})</math></p> <p>в) <math>y = \operatorname{tg}(\arcsin 5x)</math></p> <p>г) <math>y = (x)^{\ln x}</math></p> <p>д) <math>x^3 + y^3 - 3xy = 0</math></p>	8	<p>а) <math>y = \sqrt{1 + x + \sin x}</math></p> <p>б) <math>y = \ln \operatorname{tg} \frac{x-3}{2}</math></p> <p>в) <math>y = e^{2x} \cos 3x</math></p> <p>г) <math>y = (\sqrt[3]{x})^{2x}</math></p> <p>д) <math>x - y + e^y \cdot \operatorname{arctg} x = 0</math></p>
4	<p>а) <math>y = x \arcsin \sqrt{1 - x^2}</math></p> <p>б) <math>y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}</math></p>	9	<p>а) <math>y = \arccos \sqrt{1 + 2x^3}</math></p> <p>б) <math>y = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 3})</math></p>

	в) $y = 2x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{4x}})$ г) $y = (1 - x^2)^x$ д) $x \cdot \cos y + y \cdot \sin x = xy$		в) $y = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x}$ г) $y = x^{2\sqrt{x}}$ д) $\operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) = 3x$
5	а) $y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - 2 \operatorname{arctg} e^x$ б) $y = \ln^2(x + \cos x)$ в) $y = \arcsin \frac{2x - 3}{4x^2}$ г) $y = (1 + x^2)^x$ д) $y \cdot \sin x - \cos(x - y) = 0$	10	а) $y = \sqrt{1 + 2x} - 5x^2$ б) $y = \ln(x + \sqrt{2x + 1})$ в) $y = x^2 \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}$ г) $y = (\ln x)^{\frac{2}{x}}$ д) $y^2 x = e^{y/x}$

Вычислить производные второго порядка.

№	Функция	№	Функция
1	$y = 2xe^x$	6	$y = \frac{1}{2} \ln x$
2	$y = e^{5x}$	7	$y = (1 + x)^2$
3	$y = \cos 5x$	8	$y = e^{-2x}$
4	$y = 2x \cdot \ln x$	9	$y = \log_2 x$
5	$y = \sin x^2$	10	$y = x^2 \ln x$

### Задание 9

Провести полное исследование функции и, используя результаты исследования, построить её график:

$$y = \frac{x^2 + 2nx - 3}{x - n}$$